



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

**TEORÍA DE PERIODOS Y FUNCIONES
TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS**



INTRODUCCIÓN

El estudio de las funciones trigonométricas generalizadas, se basa en ver como varía la gráfica de las funciones trigonométricas estudiadas y así identificar e interpretar algunas propiedades que se tengan.

En ese sentido, denotaremos como **$F.T(x)$** para referirnos a alguna de las funciones trigonométricas estudiadas, ya sean $\text{sen}(x)$, $\text{cos}(x)$, $\text{tan}(x)$, $\text{cot}(x)$, $\text{sec}(x)$ o $\text{csc}(x)$.

También denotaremos como **$A \cdot F.T(Bx + C) + D$** para referirnos a las funciones trigonométricas generalizadas, que provengan de una **$F.T(x)$** .

Definición

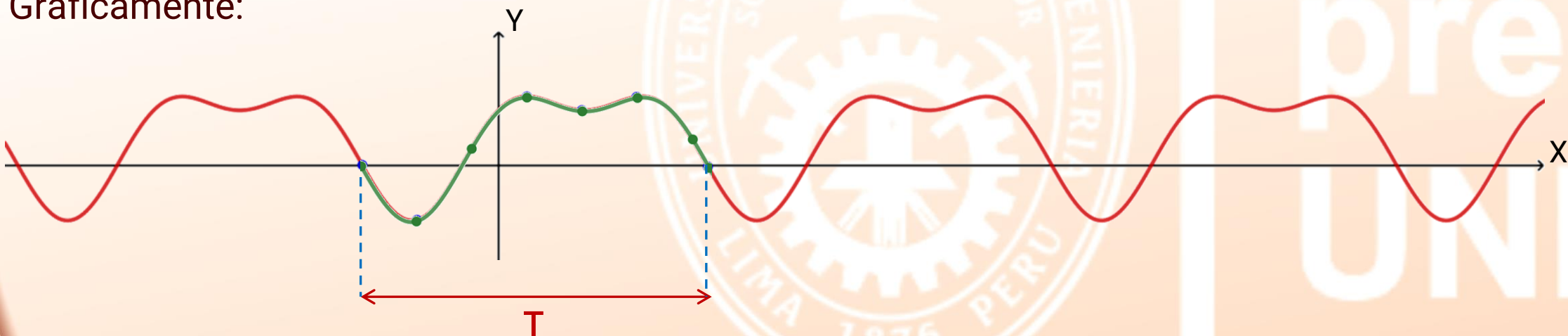
Una función f en $\mathbb{R}$ se denomina función periódica, si existe un número $T \neq 0$ tal que:

a) $\forall x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow (x + T) \in \text{Dom}(f)$

b) $\forall x \in \text{Dom}(f): f(x + T) = f(x)$

c) Denominamos periodo principal al menor $T > 0$ que cumpla a) y b)

Gráficamente:



PROBLEMA 01

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = 5\text{sen}(8x) - 1$

- A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{4\pi}{5}$ E) π

PROBLEMA 02

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = 3\cos(5x) - 1$

- A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{5}$ D) $\frac{4\pi}{5}$ E) π

PROBLEMA 03

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = 3\text{sen}^5\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{5}\right) + 2$

- A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{4\pi}{3}$ D) $\frac{5\pi}{3}$ E) 3π

PROBLEMA 04

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = 8\cos^4\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) + 3$

A) $\frac{\pi}{3}$

B) $\frac{2\pi}{3}$

C) $\frac{4\pi}{3}$

D) $\frac{5\pi}{3}$

E) 2π

PROBLEMA 05

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = 7\tan^3\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

A) $\frac{\pi}{8}$

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{2}$

D) π

E) 2π

Consideración 01:

Definimos la función: $f(x) = A \cdot FT^n(Bx + C) + D$ $\left\{ \begin{array}{l} A, B \in \mathbb{R} - \{0\} \\ n \in \mathbb{Z} - \{0\} \\ C, D \in \mathbb{R} \end{array} \right.$

El periodo principal de f se puede calcular aplicando la siguiente regla:

1º) Para las funciones seno, coseno, secante y cosecante:

$$\text{Si } n \text{ es par: } T = \frac{\pi}{|B|}$$

Por ejemplo:

$$f(x) = 2\cos^6(7x) - 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{7}$$

$$g(x) = 3\csc^4\left(\frac{2x}{3}\right) + 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Si } n \text{ es impar: } T = \frac{2\pi}{|B|}$$

Por ejemplo:

$$f(x) = 5\sin^9(4x) - 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = 8\sec^5\left(\frac{7x}{4}\right) + 1 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{7}{4}} = \frac{8\pi}{7}$$

2º) Para las funciones tangente y cotangente:

$$\text{Si } n \text{ es par o impar: } T_f = \frac{\pi}{|B|}$$

Por ejemplo:

$$f(x) = 5\tan^4(4x) - 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

$$g(x) = 4\tan^7\left(\frac{5x}{4}\right) + 3 \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{5}{4}} = \frac{4\pi}{5}$$

$$f(x) = 2\cot^8\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) - 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = 7\cot^{2021}\left(\frac{2x}{5} - \frac{\pi}{13}\right) + 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{2}{5}} = \frac{5\pi}{2}$$

Consideración:

Si una función no adopta la forma anteriormente definida, se tendría que aplicar la definición de función periódica.

PROBLEMA 06

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = \cos(\sin(8x))$

A) $\frac{\pi}{8}$

B) $\frac{\pi}{4}$

C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\frac{3\pi}{4}$

E) $\frac{5\pi}{4}$

PROBLEMA 07

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = \sin(\sin(5x))$

A) $\frac{\pi}{10}$

B) $\frac{\pi}{5}$

C) $\frac{3\pi}{10}$

D) $\frac{2\pi}{5}$

E) $\frac{4\pi}{5}$

PROBLEMA 08

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = |\cot(8x)|$

A) $\frac{3\pi}{4}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{8}$

E) $\frac{\pi}{16}$

Consideración 02:

Dada la función: $g(x) = A \cdot \mathbf{FT}(\mathbf{Bx})$; cuyo periodo principal es T

Definimos la función: $f(x) = |\mathbf{A} \mathbf{FT}(\mathbf{Bx})|$; tal que su periodo principal es T_f y se calcula de la siguiente manera:

1º) Para las funciones seno, coseno, secante y cosecante:

$$T_f = \frac{T}{2}$$

2º) Para las funciones tangente y cotangente:

$$T_f = T$$

Por ejemplo:

$$* f(x) = |5\text{sen}(8x)|$$

$$\text{Para } g(x) = 5\text{sen}(8x): T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$* g(x) = \left| 2\tan\left(\frac{x}{5}\right) \right|$$

$$\text{Para } h(x) = 2\tan\left(\frac{x}{5}\right): T = \frac{\pi}{\frac{1}{5}} = 5\pi$$

$$\Rightarrow T_g = 5\pi$$

PROBLEMA 09

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = |\sin(4x)| + |\cos(4x)|$

- A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$

PROBLEMA 10

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = |\sec(6x)| + |\csc(6x)|$

- A) $\frac{\pi}{24}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{2\pi}{3}$

PROBLEMA 11

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = 2^{|\sin(4x)|} + 2^{|\cos(4x)|}$

- A) $\frac{\pi}{32}$ B) $\frac{\pi}{16}$ C) $\frac{\pi}{8}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

Consideración 03:

Dadas las funciones:

$$\begin{cases} f(x) = |\operatorname{sen}(Bx)| + |\operatorname{cos}(Bx)| \\ f(x) = |\operatorname{tan}(Bx)| + |\operatorname{cot}(Bx)| \\ f(x) = |\operatorname{sec}(Bx)| + |\operatorname{csc}(Bx)| \end{cases}$$

$$B \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Su periodo principal T se calcula así:

$$T = \frac{\pi}{2|B|}$$

Por ejemplo:

$$* f(x) = |\operatorname{sen}(8x)| + |\operatorname{cos}(8x)| \Rightarrow T = \frac{\pi}{2(8)} = \frac{\pi}{16}$$

$$* f(x) = \left| \operatorname{sec}\left(\frac{x}{5}\right) \right| + \left| \operatorname{csc}\left(\frac{x}{5}\right) \right| \Rightarrow T = \frac{\pi}{2\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{5\pi}{2}$$

$$* f(x) = \left| \operatorname{tan}\left(\frac{2x}{3}\right) \right| + \left| \operatorname{cot}\left(\frac{2x}{3}\right) \right| \Rightarrow T = \frac{\pi}{2\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3\pi}{4}$$

PROBLEMA 12

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = \sin^{10}(7x) + \cos^{10}(7x)$

A) $\frac{\pi}{14}$

B) $\frac{\pi}{10}$

C) $\frac{\pi}{7}$

D) $\frac{2\pi}{7}$

E) $\frac{\pi}{2}$



Consideración 04:

Dadas las funciones:

$$\begin{cases} f(x) = \tan^{2n}(Bx) + \cot^{2n}(Bx) \\ f(x) = \sec^{2n}(Bx) + \csc^{2n}(Bx) \\ f(x) = \sin^{2n}(Bx) + \cos^{2n}(Bx) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} B &\in \mathbb{R} - \{0\} \\ n &\in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &\in \mathbb{R} - \{0\} \\ n &\in \mathbb{Z}; n \geq 2 \end{aligned}$$

Su periodo principal T_f se calcula así:

$$T_f = \frac{\pi}{2|B|}$$

Por ejemplo:

$$* f(x) = \sec^8(6x) + \csc^8(6x) \Rightarrow T_f = \frac{\pi}{2(6)} \Rightarrow T_f = \frac{\pi}{12}$$

$$* f(x) = \tan^{16}\left(\frac{2x}{5}\right) + \cot^{16}\left(\frac{2x}{5}\right) \Rightarrow T_f = \frac{\pi}{2\left(\frac{2}{5}\right)} \Rightarrow T_f = \frac{5\pi}{4}$$

PROBLEMA 13

Si los periodos principales de las funciones f, g y h ; definidas por:

$$f(x) = 3\tan^2\left(mx + \frac{\pi}{5}\right), g(x) = 4\sin^3\left(px + \frac{\pi}{6}\right) \text{ y } h(x) = 5\cos^4\left(nx + \frac{\pi}{7}\right);$$

se encuentran en progresión aritmética, calcule: $\frac{mn + np + pm}{mn}$; $m, n, p > 0$

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 8

PROBLEMA 14

Calcule el periodo principal de la función f definida por: $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{6}\right)$

A) 2π B) 6π C) 8π D) 12π E) 24π

PROBLEMA 15

Calcule el periodo principal de la función f definida por:

$$f(x) = \sin^4\left(\frac{x}{4}\right) + \sin^8\left(\frac{x}{6}\right)$$

- A) 2π B) 6π C) 8π D) 12π E) 24π

PROBLEMA 16

Sobre la función f definida por: $f(x) = \sin(3x)\csc(x) + \cos(3x)\sec(x)$

Se afirma:

I. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{k\pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$ II. $\text{Rang}(f) = \langle -4; 4 \rangle - \{0\}$

III. El periodo principal de f es 2π

Señale si estas proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

- A) VFF B) VFV C) FFV D) FFF E) VFV

PROBLEMA 17

Sobre la función f definida por: $f(x) = \sin^3(x)|\csc(x)| + \cos^3(x)|\sec(x)|$

Señale verdadero (V) o falso (F), según corresponda en cada caso:

I. $f(2) > f(1)$ II. En $\langle \pi; 3\pi/2 \rangle$ es decreciente

III. El periodo principal de f es 2π

A) VFF

B) VFV

C) FFV

D) FFF

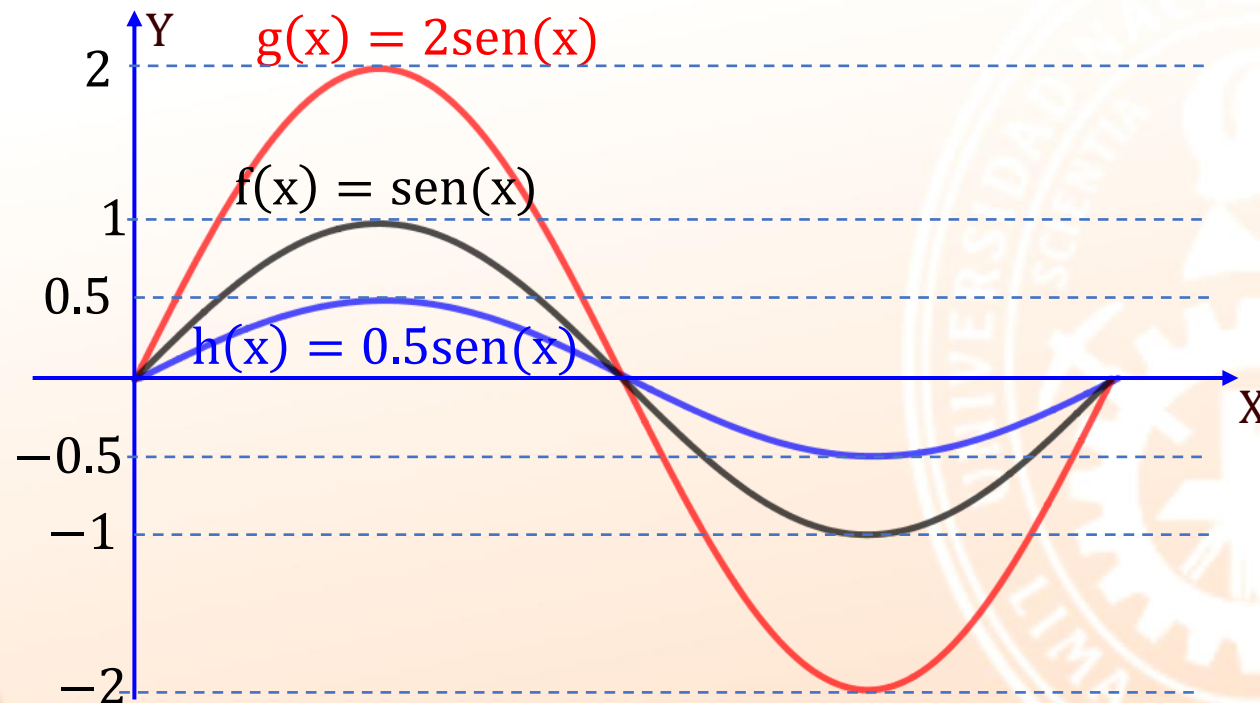
E) VFV

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS GENERALIZADAS

Son funciones de la forma $f(x) = A \cdot \text{FT}(Bx + C) + D$

Sea la función f definida por: $f(x) = A \cdot \text{sen}(Bx + C) + D$

Efecto del coeficiente $A \in \mathbb{R} - \{0\}$:



- Si $A > 1$, la gráfica de g se obtiene por una **expansión vertical** de la gráfica de f .

- Si $0 < A < 1$, la gráfica de g se obtiene por una **contracción vertical** de la gráfica de f .

Amplitud de una función:

Sea $f: X \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función seno o coseno (o sus generalizaciones mencionadas) donde el máximo y mínimo se denotan por $f_{\text{máx}}$ y $f_{\text{mín}}$ respectivamente. Se define la amplitud de f al número:

$$|A| = \frac{f_{\text{máx}} - f_{\text{mín}}}{2}$$

Ejemplo:

Sea $f(x) = 3 \cos(x) - 1$, determine su amplitud.

Como $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, tenemos que: $\underbrace{-4}_{f_{\text{mín}}} \leq \underbrace{3 \cos(x) - 1}_{f(x)} \leq \underbrace{2}_{f_{\text{máx}}}$

De esto: $A = \frac{2 - (-4)}{2} = 3$

Observación: Siempre que exista, la amplitud es un número no negativo.

Las funciones f y g definidas por $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, tienen amplitud igual a 1.

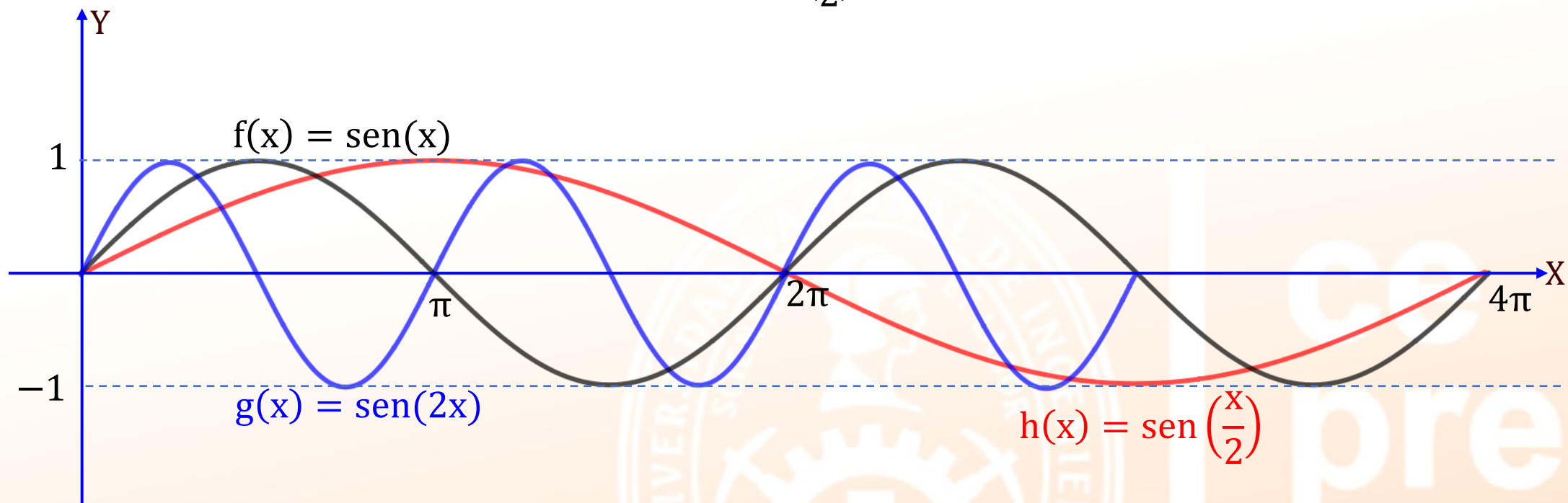
Las funciones f y g definidas por $f(x) = A \sin(x)$, $f(x) = A \cos(x)$, tienen amplitud igual a $|A|$.

Las funciones $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ y $\csc(x)$, no tienen amplitud.

Efecto del coeficiente $B \in \mathbb{R} - \{0\}$:

* $g(x) = \text{sen}(2x) \Rightarrow T = \pi$

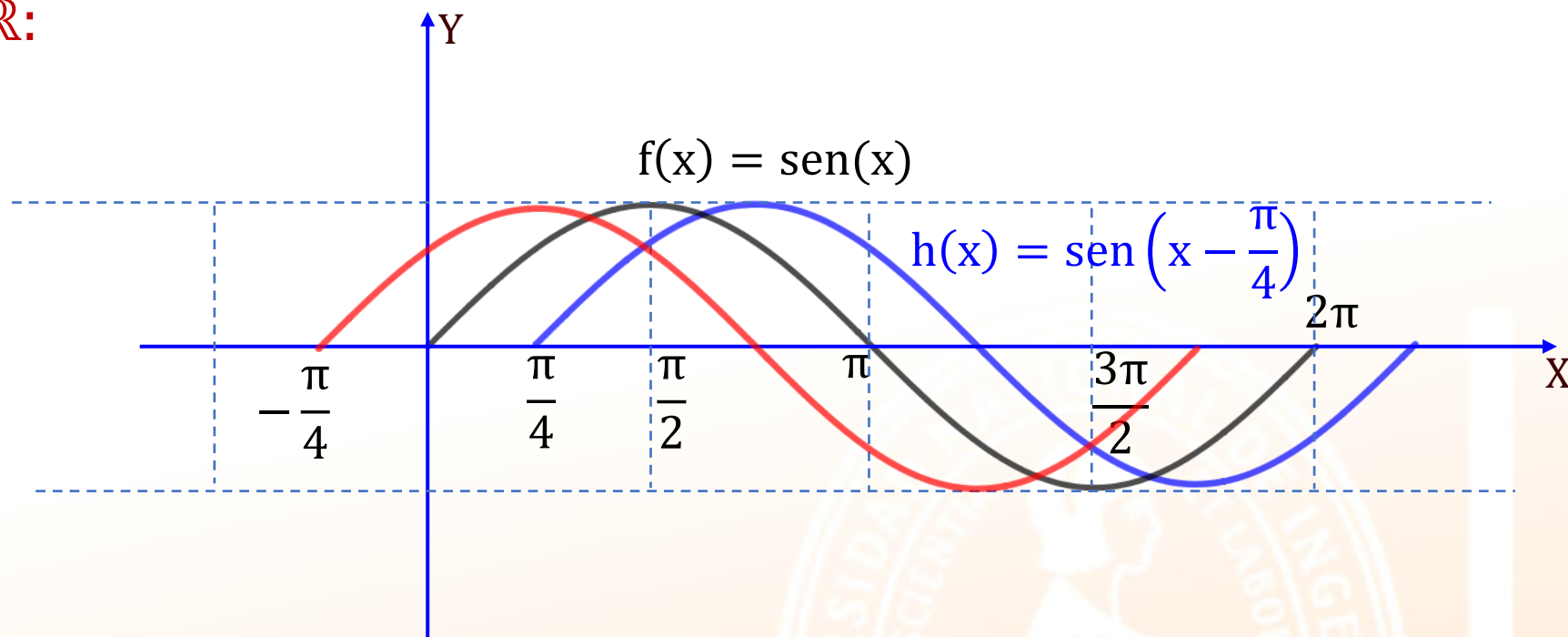
* $h(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow T = 4\pi$



- Si $B > 1$, la gráfica de g se obtiene por una contracción horizontal de la gráfica de f .
- Si $0 < B < 1$, la gráfica de h se obtiene por una expansión horizontal de la gráfica de f .

Efecto del coeficiente $C \in \mathbb{R}$:

$\mathbb{R}$:



- Si $C > 0$, la gráfica de g se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de f , en sentido negativo del eje de abscisas.
- Si $C < 0$, la gráfica de h se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica de f , en sentido positivo del eje de abscisas.

Desfase o cambio de fase

Consideremos una $F.T(x)$ y $g(x) = F.T(Bx + C)$, **un desfase o cambio de fase** de g , respecto de $F.T(x)$, es un número denotado por $\phi = -\frac{C}{B}$.

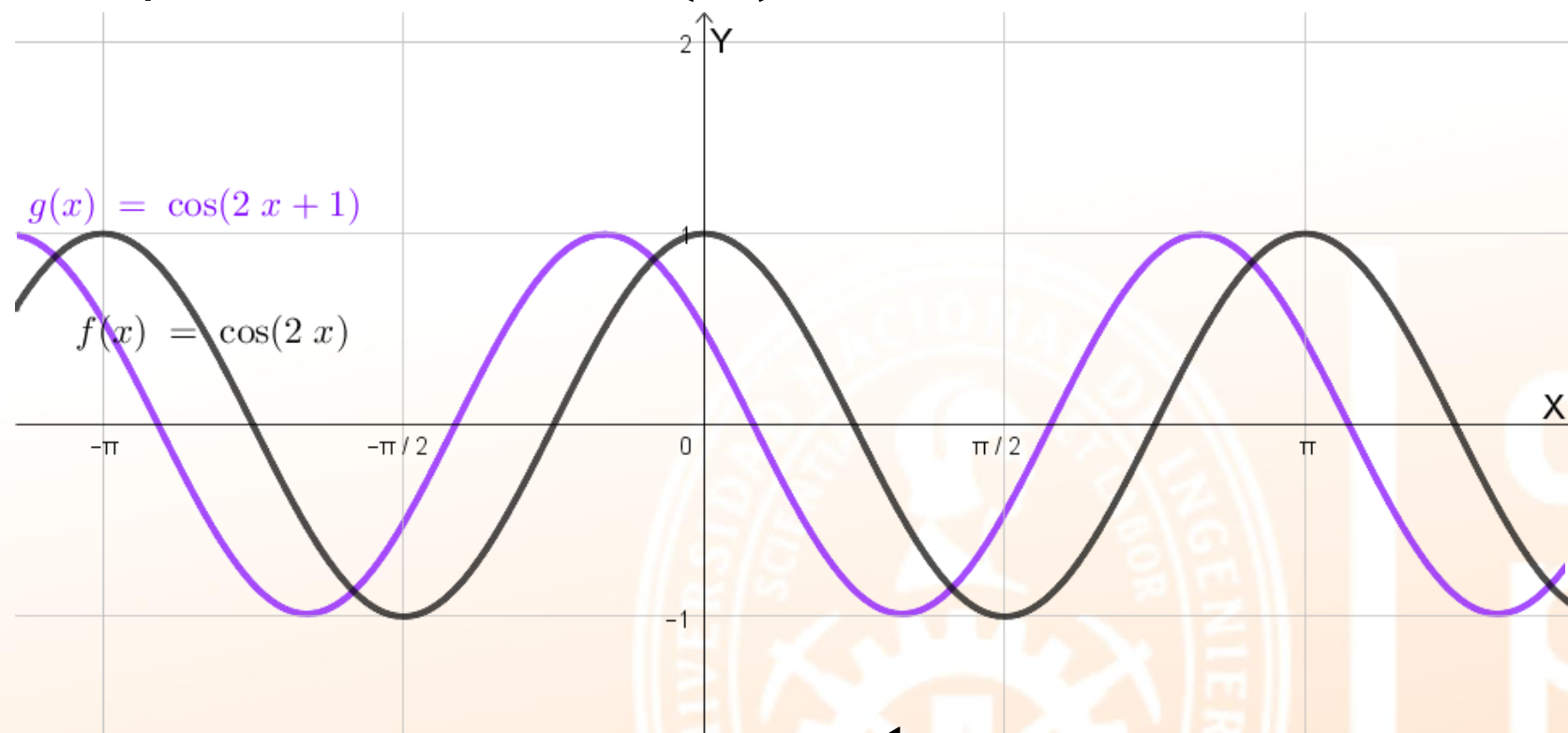
Se interpreta como el desplazamiento de la gráfica de la $F.T(Bx)$ en sentido positivo o negativo del eje de abscisas.

Observación:

Si $\phi < 0$ la gráfica se desplaza $|\phi|$ unidades en sentido negativo del eje de abscisas (a la izquierda).

Si $\phi > 0$ la gráfica se desplaza $|\phi|$ unidades en sentido positivo del eje de abscisas (a la derecha).

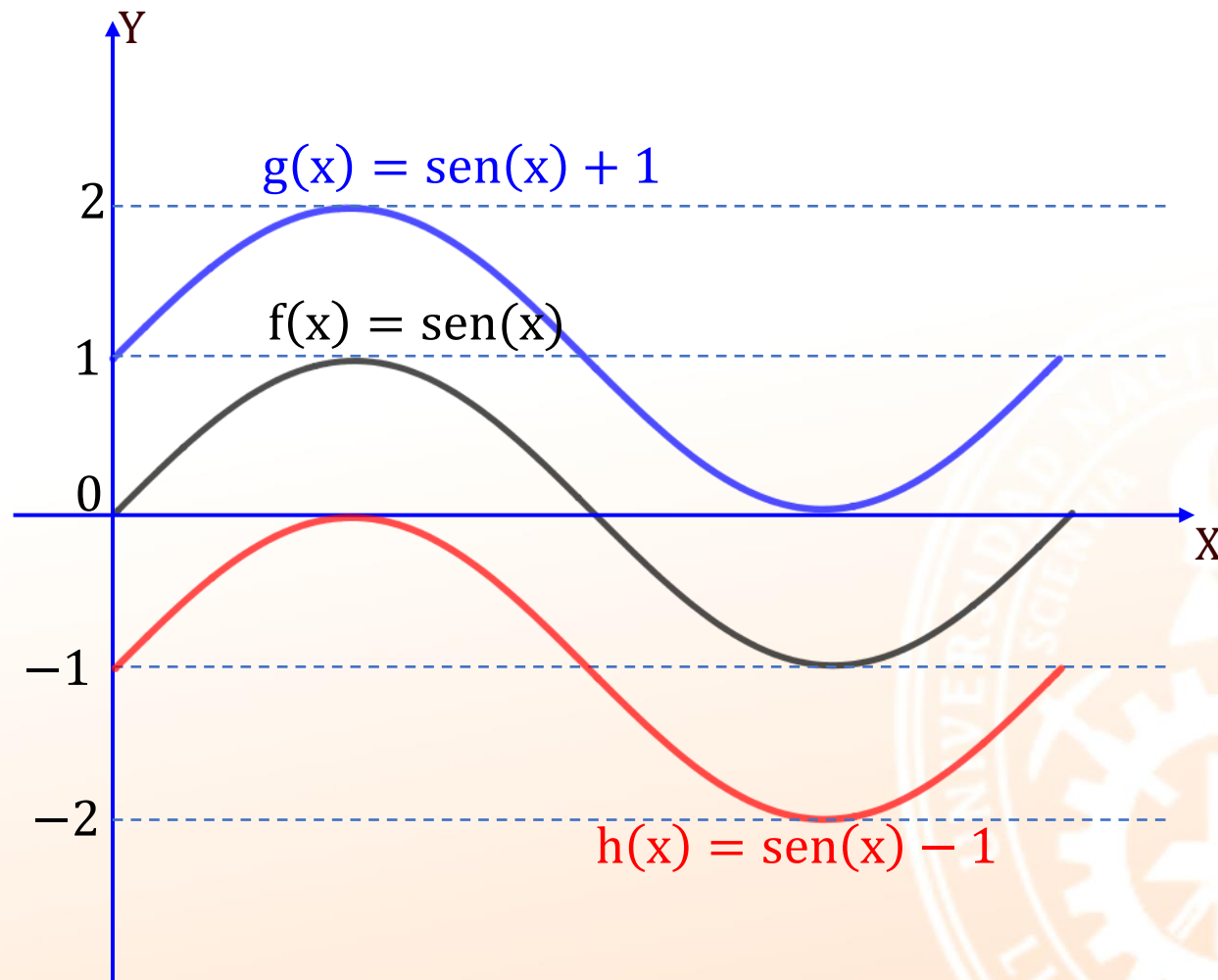
Ejemplo: Sea $g(x) = \cos(2x + 1)$, grafique la función y halle el desfase que presenta respecto la función $\cos(2x)$.



Vemos que: $g(x) = \cos(2x + 1)$, $\phi = -\frac{1}{2}$

La gráfica se desplaza $\frac{1}{2}$, en sentido negativo del eje de abscisas.

Efecto del coeficiente $D \in \mathbb{R}$:



- Si $D > 0$, la gráfica de g se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de f , en sentido positivo del eje de ordenadas.
- Si $D < 0$, la gráfica de h se obtiene desplazando verticalmente la gráfica de f , en sentido negativo del eje de ordenadas.

PROBLEMA 18

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:

$f(x) = A \cos(Bx)$; $A > 0$, $B > 0$; calcule: $\sin\left(\frac{\pi}{A}\right) \sin(B\pi)$

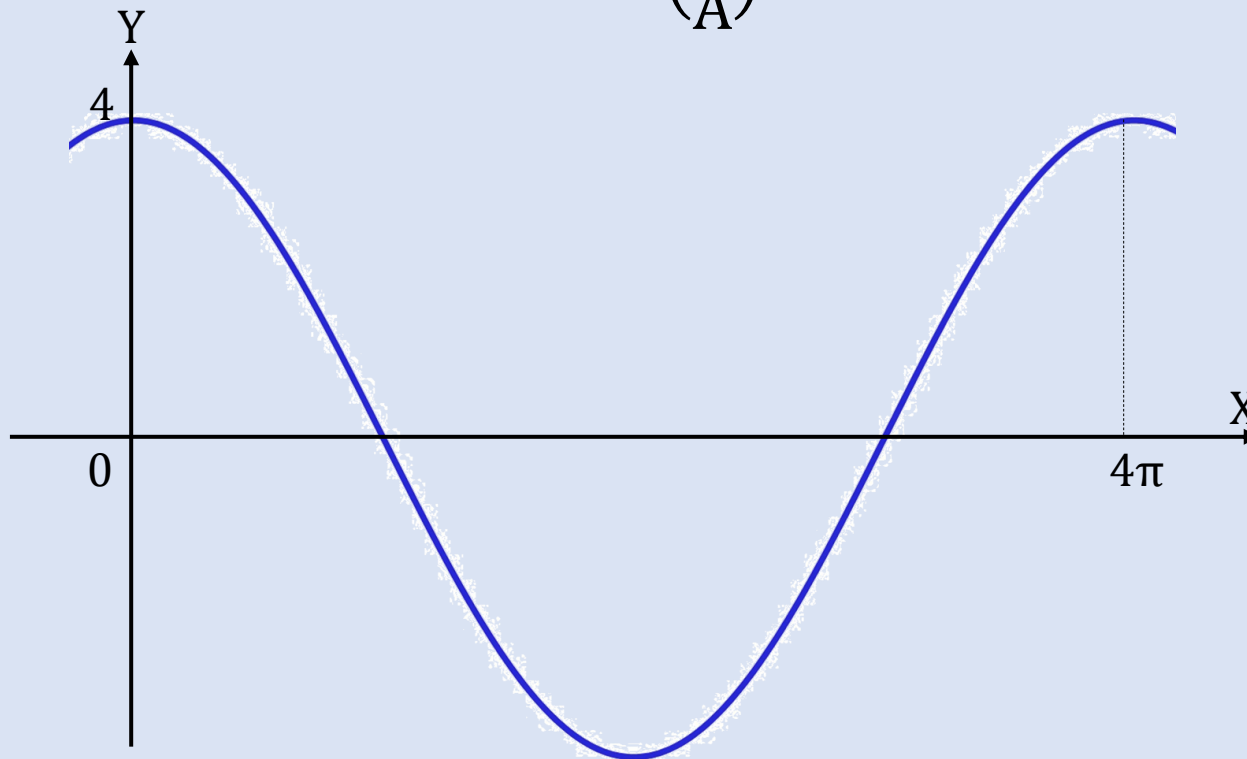
A) $\sqrt{3}/3$

B) $\sqrt{2}/2$

C) $\sqrt{3}/2$

D) $\sqrt{2}/4$

E) $\sqrt{3}/6$



PROBLEMA 19

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:

$$f(x) = A \sin(Bx) + C; A > 0, B > 0;$$

calcule: $\cos\left(\frac{\pi}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi}{B(B+C)}\right)$

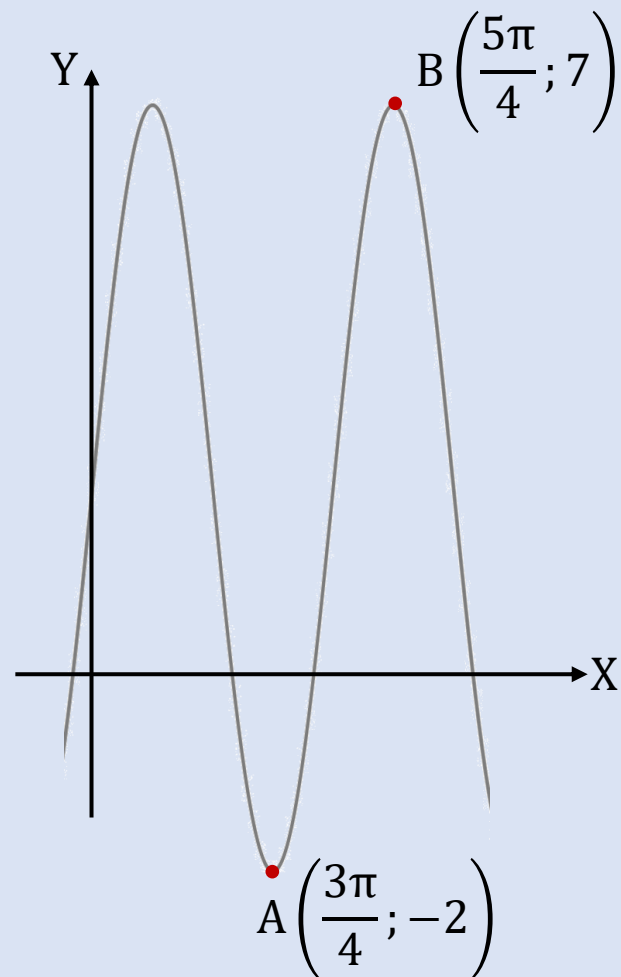
A) 0,125

B) 0,25

C) 0,5

D) 0,6

E) 0,8



PROBLEMA 20

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:

$$f(x) = A \cos(Bx + C) + D; A > 0, B > 0;$$

calcule: $(A + 2B + D) \cot(\theta)$

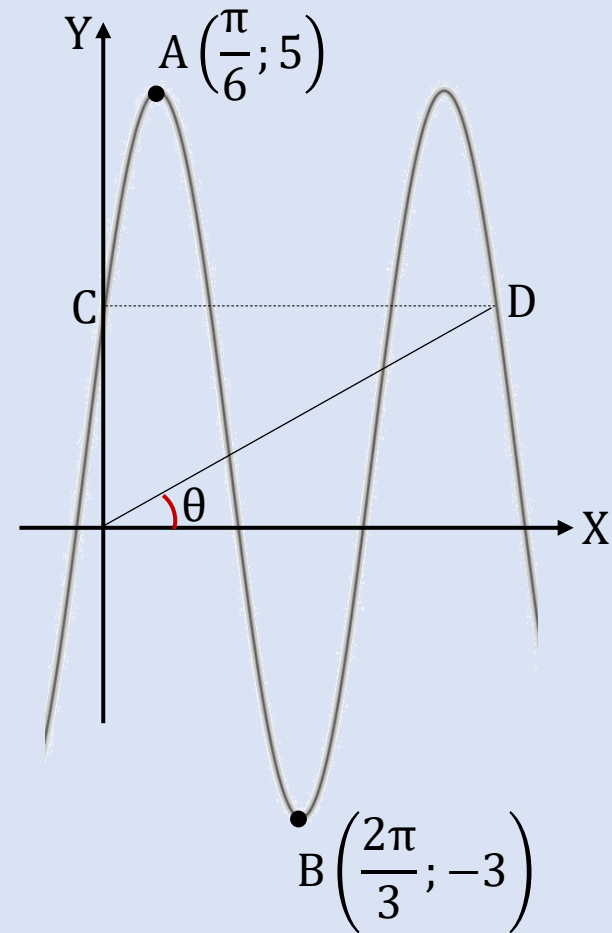
A) π

B) 2π

C) 3π

D) 4π

E) 8π



PROBLEMA 21

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:
 $f(x) = A \cos(Bx) + C$; $A > 0, 1 > B > 0$; calcule: $\tan\left(\frac{\pi}{ABC}\right)$

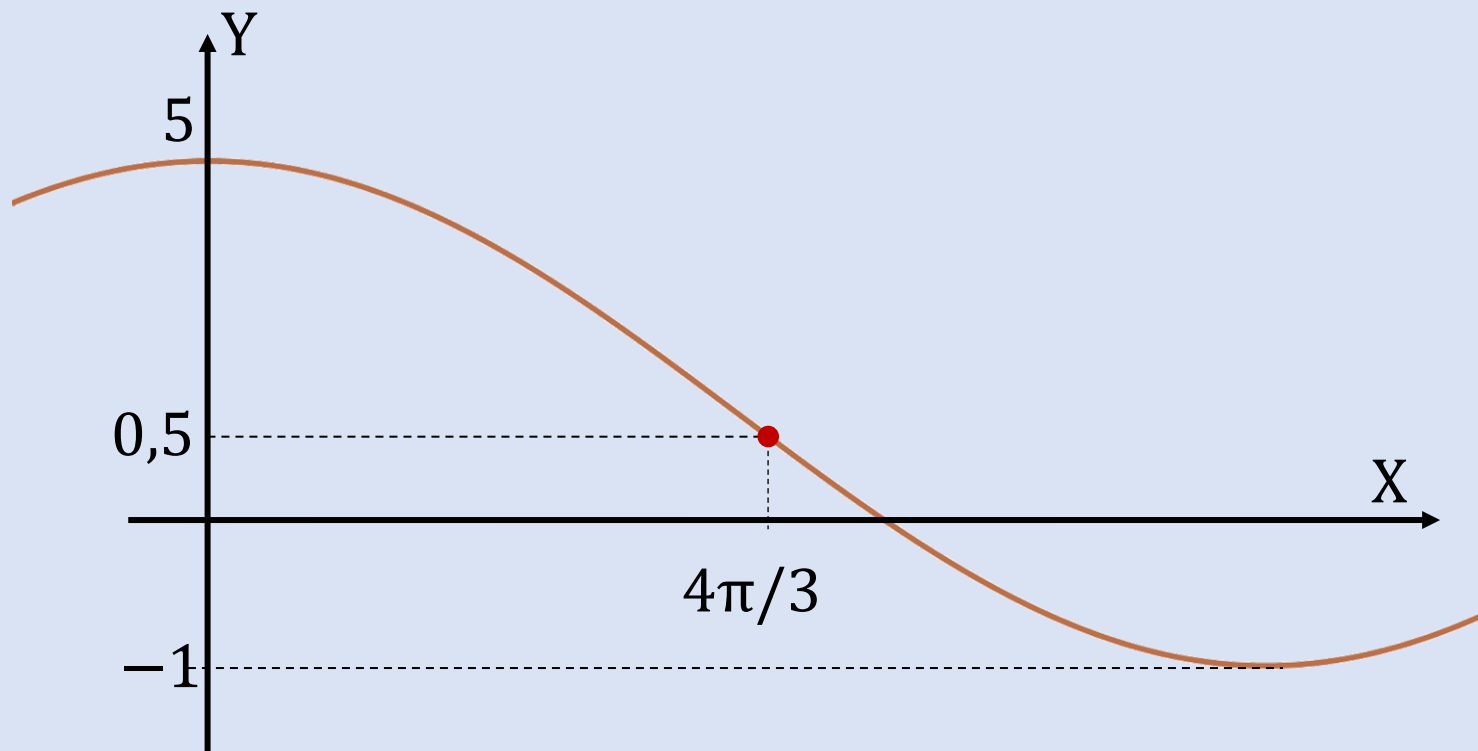
A) $-\sqrt{3}$

B) -1

C) $\sqrt{3}/3$

D) 1

E) $\sqrt{3}$



PROBLEMA 22

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:

$$f(x) = A \tan(Bx) + C; A, B > 0$$

Calcule: $\tan\left(\frac{\pi}{A^2 BC}\right)$

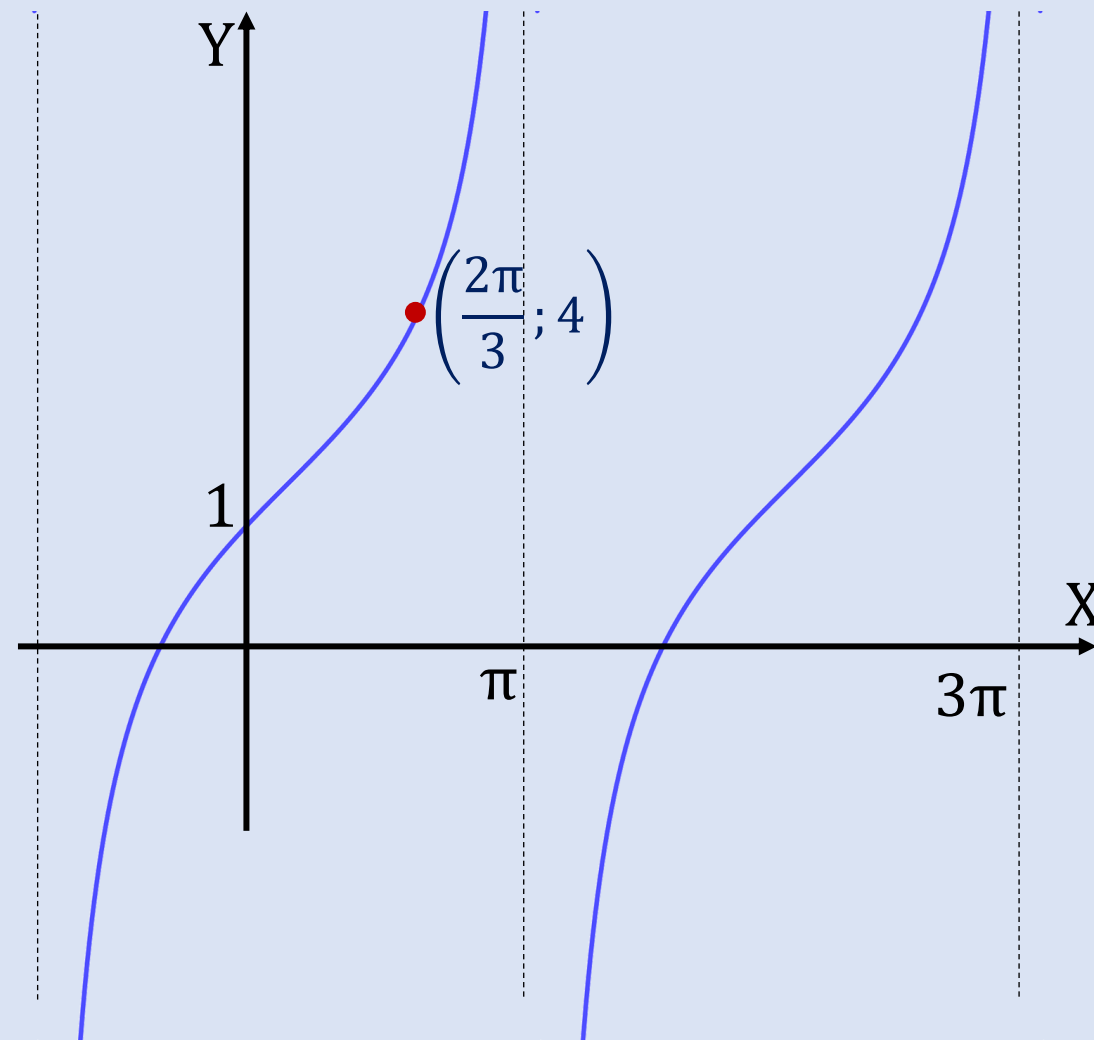
A) $-\sqrt{3}$

B) -1

C) $\sqrt{3}/3$

D) 1

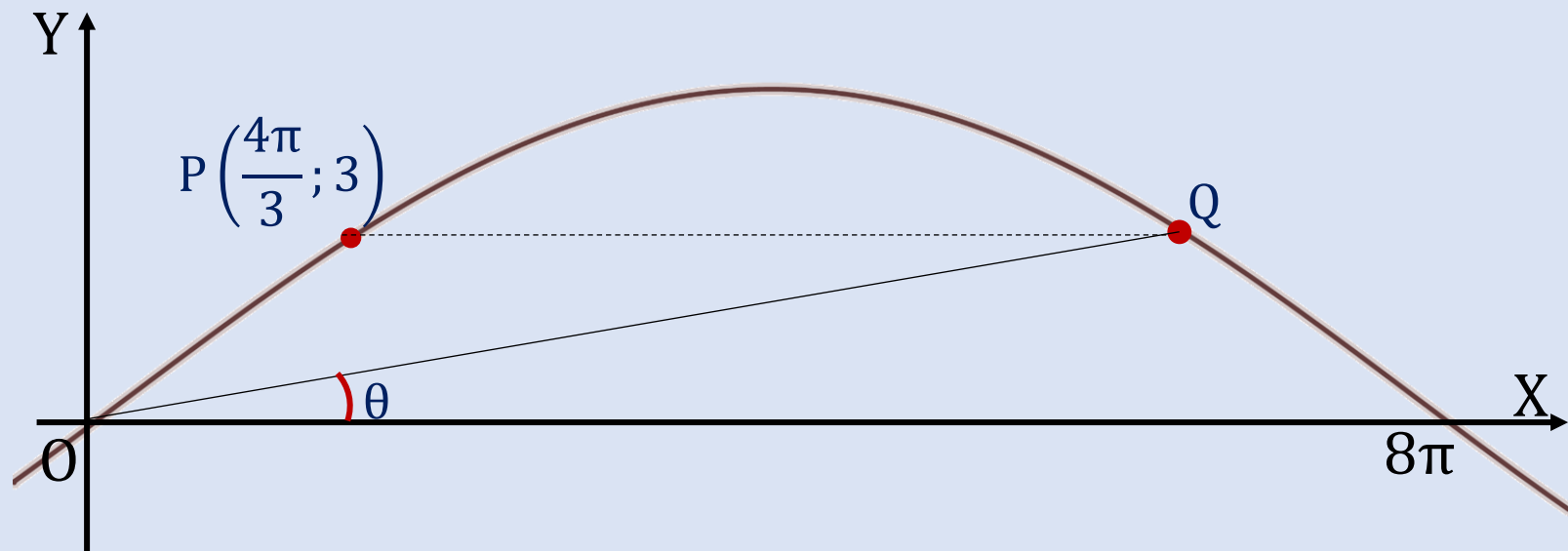
E) $\sqrt{3}$



PROBLEMA 23

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:
 $f(x) = A \sin(Bx)$; $A, B > 0$. Calcule $A \pi \tan(\theta)$ si $\overline{PQ}$ es paralelo al eje X .

- A) 1,8
- B) 2,4
- C) 2,7
- D) 3,6
- E) 4,5



PROBLEMA 24

Si la curva mostrada representa a la función f definida por:

$f(x) = A \cos(Bx)$; $A, B > 0$; y $OPQT$ es un cuadrado cuyo lado mide L u; calcule:

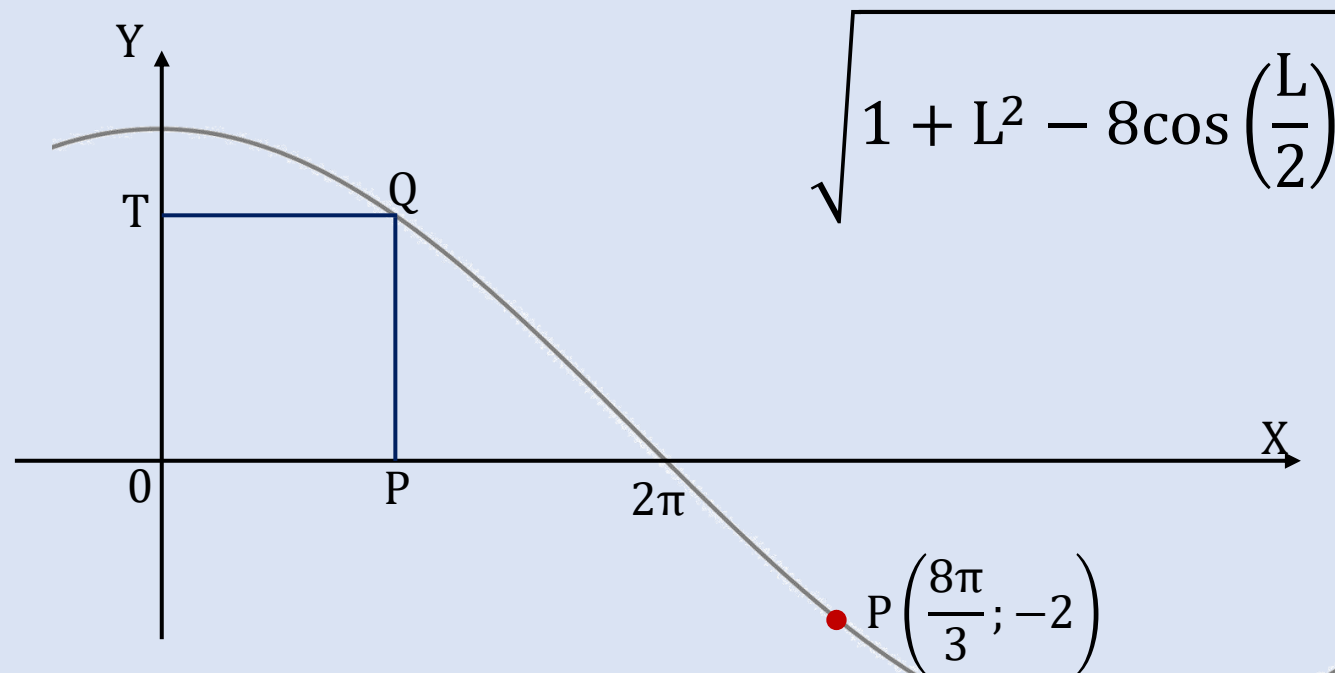
A) 1,41

B) 1,73

C) 2

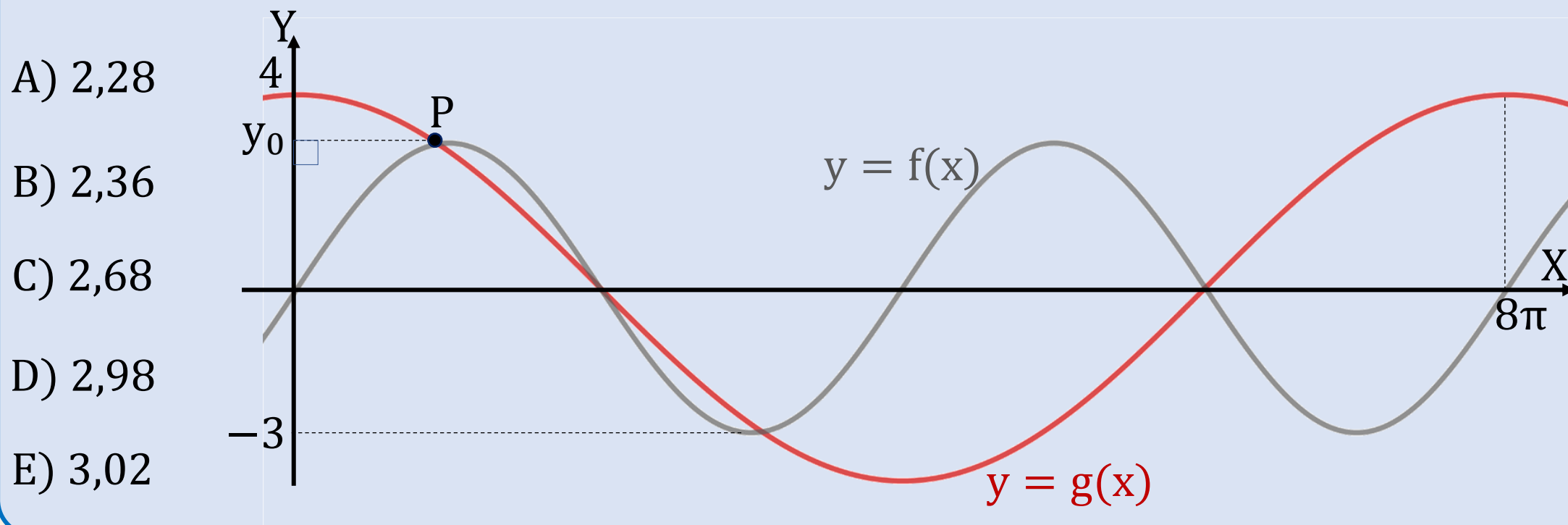
D) 2,65

E) 3



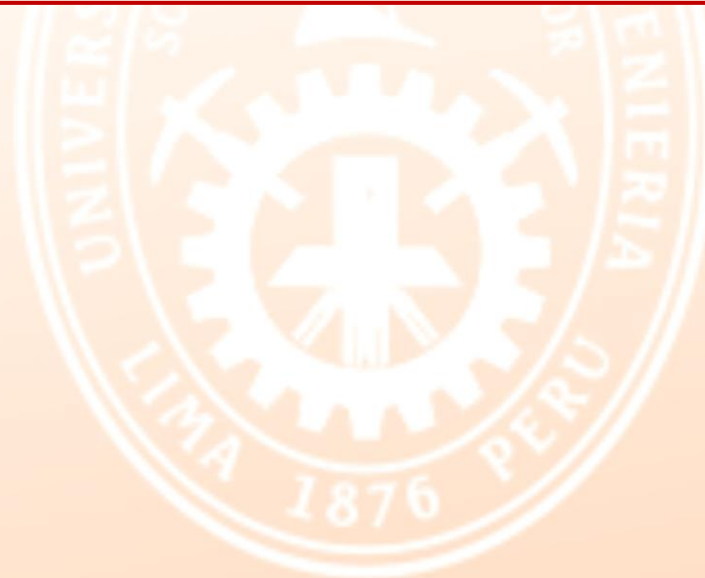
PROBLEMA 25

Si las curvas mostradas representan a las funciones f y g definidas por:
 $f(x) = A \sin(Bx)$; $g(x) = C \cos(Dx)$; $A, B, C, D > 0$; calcule aproximadamente y_0 .





Ahora resuelve los ejercicios que están propuestos en tu material de clase.



pre
UNI